



TITLE:

# 有限半単純Lie環のNilpotent Orbitsに附随したTrigonometrical Sumsについて (有限群論)

AUTHOR(S):

川中, 宣明

---

CITATION:

川中, 宣明. 有限半単純Lie環のNilpotent Orbitsに附随したTrigonometrical Sumsについて (有限群論). 数理解析研究所講究録 1979, 344: 141-145

ISSUE DATE:

1979-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104305>

RIGHT:

# 有限半単統 Lie 環の nilpotent orbits に 附随した trigonometrical sums について

阪大 理 川中 宣明

§1. この節では,  $G$  を split BN-pair  $\{B, N\}$  を持つ有限群 (C1) とする.  $\{W, S\}$  を  $\{G, B, N\}$  に附随する Coxeter 系;  $P_I$  ( $I \subset S$ ) を  $G$  の標準的な放物型部分群;  $L_I, V_I$  をそれぞれ  $P_I$  の Levi 部分群と unipotent radical とする.  $G$  上の (複素数値) 類関数  $\varphi$  に対して, 次式によって  $P_I$  上の類関数  $\varphi_I$  を定義する:

$$\varphi_I(x) = |V_I|^{-1} \sum_{u \in V_I} \varphi(xu) \quad (x \in P_I).$$

Harish-Chandra の cusp forms の概念を, 少し変更して次の概念を導入する.

定義 1.  $G$  上の類関数  $\varphi$  が quasi-cuspidal である, とは,  $\forall I \subsetneq S$  に対して  $\varphi_I \equiv 0$  となることである.

$G$  上の類関数の空間を  $Cl(G)$ , quasi-cuspidal な元

全体のなす部分空間を  $\mathcal{C}\ell(G)^{\text{g.c.}}$  と記すことにすると,

定理1.  $\mathcal{C}\ell(G) = \bigoplus_{I \subset S} \text{ind}_{P_I}^G (\mathcal{C}\ell(L_I)^{\text{g.c.}})$  :  $\mathcal{C}\ell(G)$  上の標準的な hermite 内積に関する直交分解. 但し,  $f \in \mathcal{C}\ell(L_I)$  は  $f(xu) = f(x)$  ( $x \in L_I, u \in U_I$ ) とおくことによつて  $\mathcal{C}\ell(P_I)$  の元と考える.

この定理の1つ々の応用として, Harish-Chandra の結果 ([1; Th. 3.5]) が次のように一般化できる.

定理2.  $P_1, P_2$  を  $G$  の放物型部分群で,  $L = P_1 \cap P_2$  が  $P_1$  の Levi 部分群であると同時に  $P_2$  の Levi 部分群でもある, とする.  $\varphi \in \mathcal{C}\ell(L)$  を, 定理1におけると同様に  $P_1$  あるいは  $P_2$  上の類関数と考えて次の等式が成立する:

$$\text{ind}_{P_1}^G(\varphi) = \text{ind}_{P_2}^G(\varphi).$$

$\varphi \in \mathcal{C}\ell(G)$  に対して,  $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}\ell(G)$  を次式によつて定義する:

$$\hat{\varphi} = \sum_{I \subset S} (-1)^{|I|} \text{ind}_{P_I}^G(\varphi_I).$$

定理3. (i)  $\varphi \in \mathcal{C}\ell(G)$  の定理1の分解を  $\varphi = \sum_{I \subset S} \varphi(I)$

とすると,  $\hat{\varphi} = \sum_{I \in S} (-1)^{|I|} \varphi(I)$ . とくに  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{Q}(G)$  に対して  $(\varphi_1, \varphi_2)_G = (\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2)_G$  が成立.

(iii)  $\varphi$  が  $G$  の線型表現の指標なら  $\hat{\varphi}$  は一般指標である. とくに  $\varphi$  が既約指標なら  $\hat{\varphi} - \varphi$  も既約指標である.

定理 3 (iii) により,  $G$  の既約指標の pairing が定義できる. この pairing は,  $\text{ind}_B^G(1_B)$  の既約成分の pairing を induce することは容易にわかる. これが Hecke 環  $H_G(G, B)$  の Goldman による involutory automorphism ([2]) から induce される pairing と一致していることは, 行巻明彦氏により証明された.

§2.  $\underline{G}$  を有限体  $k$  ( $\text{char. } k = p$ ) 上定義された連結かつ reductive な線型代数群,  $\underline{\mathfrak{g}}$  をその Lie 環とし,  $\underline{G}$  および  $\underline{\mathfrak{g}}$  の Frobenius 写像を共に記号  $F$  で表わす.

定理 (T.A. Springer [3])  $\underline{N}$  を  $\underline{\mathfrak{g}}$  の nilpotent な元全体のなす  $\underline{\mathfrak{g}}$  の closed irreducible subvariety,  $\underline{V}$  を  $G$  の unipotent な元全体のなす  $\underline{G}$  の closed irreducible subvariety とする. 今  $p$  が  $\underline{G}$  (のルート系) に対して '良い素数' であるとする. このとき,  $\underline{V}$  から  $\underline{N}$  への morphism  $f$  で次の三条件を満たすものが存在する:

- (a)  $f$  は homeomorphism.  
 (b)  $f$  は  $\underline{G}$  の  $\underline{V}$  および  $\underline{N}$  への作用 (conjugation および adjoint action) と可換.  
 (c)  $f$  は Frobenius map  $F$  と可換.

$\underline{v}$  を  $\underline{N}$  における  $F$ -stable な  $\underline{G}$ -orbit,  $\underline{O}$  を上の  $f$  によって  $\underline{v}$  に対応するような ( $\underline{V}$  における)  $F$ -stable な  $\underline{G}$ -orbit とする.  $\underline{v}, \underline{G}, \underline{v}, \underline{O}$  の  $F$ -不動点全体のなす集合を, それぞれ  $\mathcal{V}, \mathcal{G}, \mathcal{V}, \mathcal{O}$  と記すことにする. また,  $\mathcal{O}, \mathcal{O}$  の  $\mathcal{V}, \mathcal{G}$  における characteristic function をそれぞれ  $1_{\mathcal{O}}, 1_{\mathcal{O}}$  と書くことにする.  $\mathcal{V}$  における  $1_{\mathcal{O}}$  の Fourier 変換像  $\mathcal{F}(1_{\mathcal{O}})$  を考える:

$$\mathcal{F}(1_{\mathcal{O}})(X) = q^{-N} \sum_{f \in \mathcal{O}} \chi(\langle X, f \rangle) \quad (X \in \mathcal{V}),$$

ここに  $q^N$  は  $\mathcal{G}$  の  $p$ -Sylow 部分群の位数,  $\chi$  は  $\mathbb{C}^*$  の ( $\mathbb{C}^*$ -値) 指標 ( $\neq 1$ ),  $\langle, \rangle$  は 'Killing form' である. ここでは, 特に  $X$  が nilpotent である場合に注目する:

定理 4.  $(\hat{1}_{\mathcal{O}})(u) = \mathcal{F}(1_{\mathcal{O}})(f(u))$ , ここに左辺の  $\hat{\phantom{x}}$  は §1 で導入したもの, 右辺の  $f$  は上の Springer の定理に出てくるもの, とする.

$$\text{系. } \sum_X \mathcal{F}(1_{\mathcal{O}})(X) \overline{\mathcal{F}(1_{\mathcal{O}'})(X)} = \begin{cases} |\mathcal{O}| & (\mathcal{O} = \mathcal{O}'), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

ここに左辺の  $X$  は  $\mathcal{G} \cap \underline{N}$  を動くものとする.

§3. 定理3および定理4とその系を用いて Ennola の予想 (「 $GL_n(\mathbb{F}_q)$  の character table と  $D_n(\mathbb{F}_q)$  の character table とは,  $\chi \rightarrow -\chi$  という置き換えによ, 互に変換し合う。」) を, 証明することができる. このことについては, もう少し証明を整理して別の機会に報告させて頂きたい.

### 文 献

- [1] R.W. Curtis; Reduction theorems for characters of finite groups of Lie type, J. Math. Soc. Japan 27 (1975), 666-688.
- [2] N. Iwahori; On the structure of the Hecke ring of a Chevalley group over a finite field, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 10 (1964), 215-236.
- [3] T. A. Springer; The unipotent variety of a semi-simple group, in Proc. Bombay Collog. on Algebraic Geometry (1968), 373-391, Tata Institute, 1969.